

图书在版编目 (CIP) 数据

牛顿力学的横向研究：纪念《自然哲学之数学原理》发表 300 年：1687—1987 / 查有梁著. —2 版. —成都：四川教育出版社，2014. 5

ISBN 978-7-5408-6412-5

I. ①牛… II. ①查… III. ①牛顿力学—研究  
IV. ①03

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 046074 号

---

## 牛顿力学的横向研究(第二版)

——纪念《自然哲学之数学原理》发表 300 年 (1687—1987)

查有梁 著

---

责任编辑 肖 勇

装帧设计 毕 生

责任校对 吴映泉

责任印制 吴晓光

出版发行 四川教育出版社

地 址 成都市槐树街 2 号

邮政编码 610031

网 址 [www.chuanjiaoshe.com](http://www.chuanjiaoshe.com)

印 刷 成都东江印务有限公司

制 作 四川胜翔数码印务设计有限公司

版 次 2014 年 5 月第 1 版

印 次 2014 年 5 月第 1 次印刷

成品规格 170mm×240mm

印 张 22.25

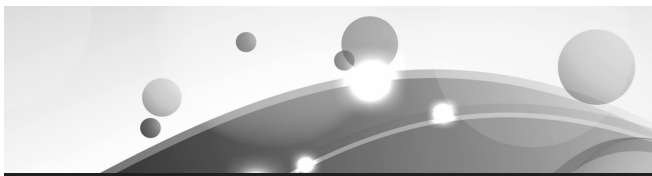
书 号 ISBN 978-7-5408-6412-5

定 价 55.00 元

---

如发现印装质量问题，请与本社联系调换。电话：(028) 86259359

营销电话：(028) 86259605 邮购电话：(028) 86259694 编辑部电话：(028) 86259381



# CONTENTS

## 目录 (一)

### 第二版序言

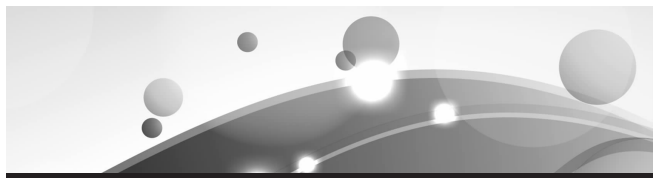
#### 序言

### 第一章 从牛顿微积分到非标准分析

- 1.1 非标准分析 / 005
- 1.2 切线坐标变换 / 011
- 1.3 圆锥曲线理论 / 014
- 1.4 切线坐标的应用 / 019
- 1.5 天体运行的公式 / 021
- 1.6 四类匀变直线运动 / 029

### 第二章 从牛顿引力论到引斥论

- 2.1 万有引力定律 / 041
- 2.2 引斥力公式 / 043
- 2.3 [力·时空] 表述与 [能量·时空] 表述 / 047
- 2.4 量纲对称原理 / 050
- 2.5 惯性起源的揣测 / 053



# CONTENTS

## 目录 (二)

### 第三章 从牛顿力学的教学到相对论力学教学

- 3.1 牛顿力学的教学结构 / 071
- 3.2 狭义相对论的结构 / 079
- 3.3 迈克尔孙—莫雷实验 / 082
- 3.4 洛伦兹变换 / 085
- 3.5 相对论运动学 / 088
- 3.6 相对论动力学 / 092
- 3.7 行星近日点旋转 / 097

### 第四章 从牛顿力学观到辩证自然观

- 4.1 物质—运动观 / 107
- 4.2 时间—空间观 / 121
- 4.3 有限—无限观 / 127
- 4.4 吸引—排斥观 / 134
- 4.5 因果—机遇观 / 146

### 第五章 从牛顿力学方法到现代物理方法

- 5.1 牛顿力学的方法 / 163
- 5.2 科学方法的结构 / 172

- 5.3 对立原理 / 183
- 5.4 对应原理 / 186
- 5.5 对称原理 / 191

## 第六章 从牛顿力学看中国传统科学

- 6.1 中国传统科学与西方科学 / 205
- 6.2 落下闳系统与托勒密系统 / 208
- 6.3 中国古代数理天文的启发性 / 219
- 6.4 从“缀术”求 $\pi$ 到“缀术”推星 / 224
- 6.5 中国近代科学技术落后原因 / 242

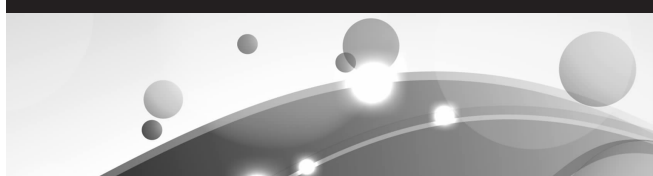
## 附录

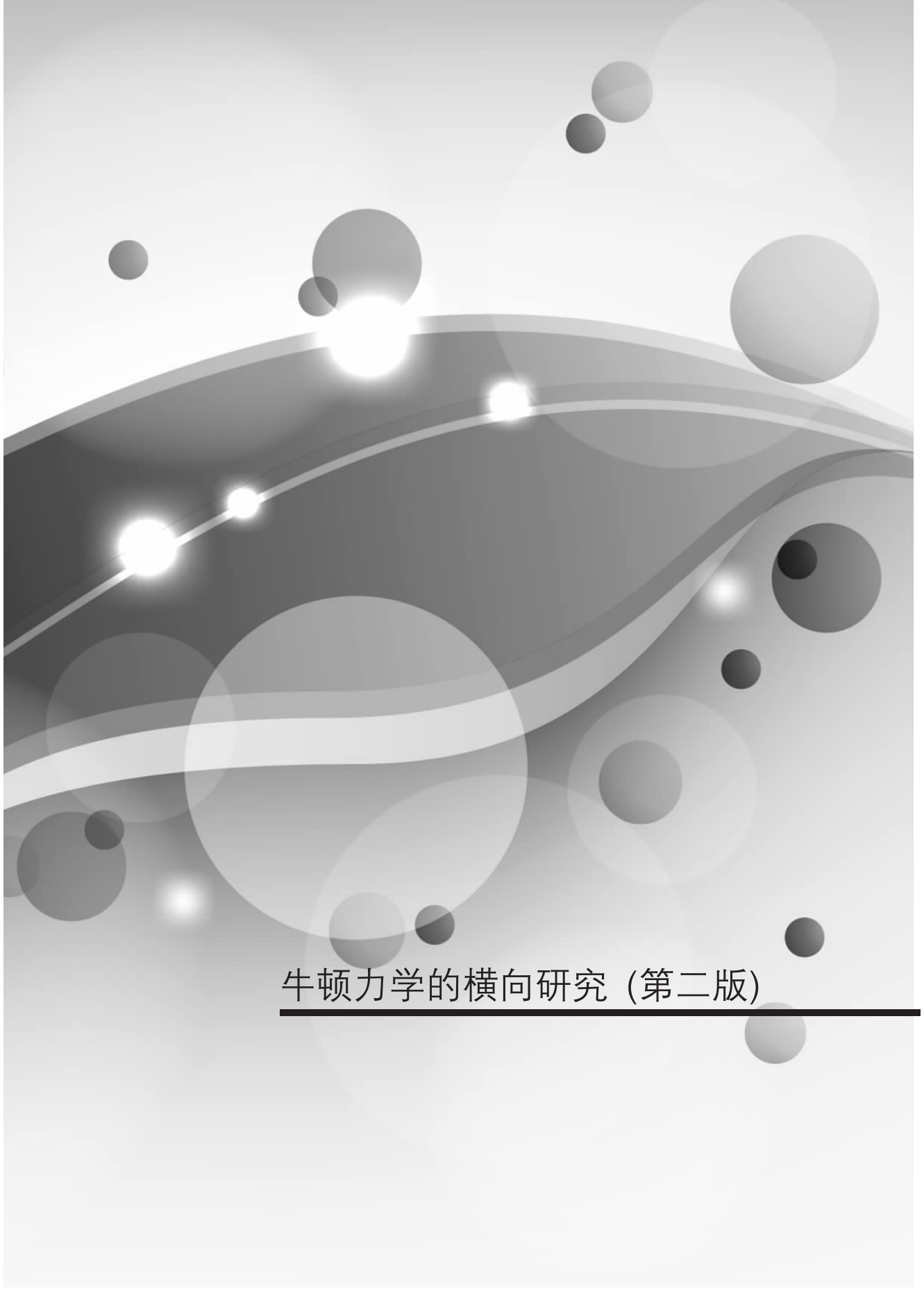
- 附录 I 引力定律的新研究 / 266
- 附录 II 不确定原理的新研究 / 280
- 附录 III 质量—信息关系式与信息量子 / 290
- 附录 IV 再读钱学森先生的三封来信 / 302
- 参考文献 / 315
- 后记 / 328
- 第二版结语 / 331

# 目 录

(三)

## CONTENTS



The background features a light gray gradient with several overlapping, semi-transparent wavy bands in shades of gray. Scattered throughout are various sized circles, some solid dark gray and others semi-transparent light gray, creating a sense of depth and movement.

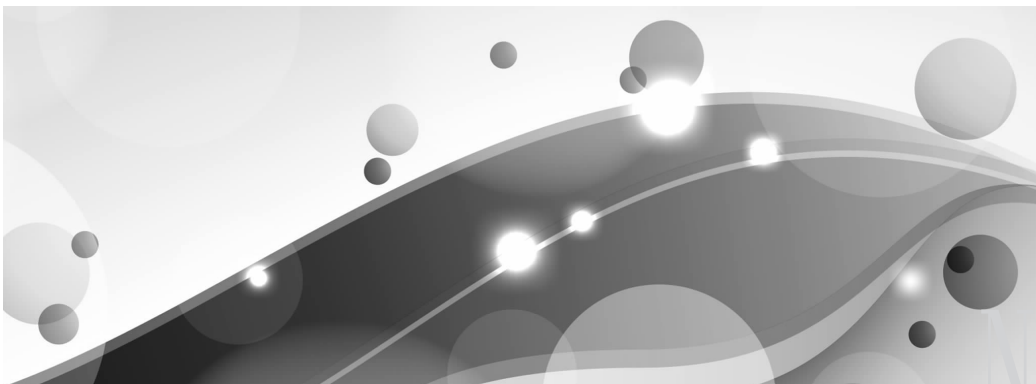
牛顿力学的横向研究 (第二版)

---



只有微分定律的形式才能完全满足近代物理学家对因果性的要求。微分定律的明晰概念是牛顿最伟大的理智成就之一。当时不仅需要这种概念，而且还需要一种数学的形式体系，这种形式体系当时只是一种初步的，还需要得到成体系的形式。牛顿在微积分里也找到了这种形式。（《爱因斯坦文集》第一卷）

——爱因斯坦



NIUDUN

## 第一章 从牛顿微积分到非标准分析

牛顿发展出微积分，对于他完成《自然哲学之数学原理》是极为重要的。在《原理》中，牛顿已简要地论述了微积分方法，包括了极限概念——但是他的极限概念不严格，后来柯西等人用  $\epsilon$ - $\delta$  语言论证才使微积分的基础严密了。本章论述了非标准分析，一种不用  $\epsilon$ - $\delta$  语言的微积分，它对于解决力学问题既有严格的逻辑基础又很直观清晰。用非标准分析证明切线坐标变换，并给出了一个新的圆锥曲线理论，得到了圆锥曲线的切线坐标方程和统一的曲率半径公式，得到了天体运行的能量方程等新结果。本章还讨论了四类匀变直线运动。



现代科学研究丛书

## LIXUEDEHENGXIANGYANJIU

## 1.1 非标准分析

美国数学家 A. 鲁滨孙, 在 1960 年提出非标准分析。<sup>[1]</sup> 由于非标准分析与柯西等人用极限方法建立起来的微积分理论, 即标准分析的联系和区别, 这自然会引起人们的关注。1976 年, J. 开斯勒尔应用非标准分析写了第一本教科书《初等微积分》。<sup>[2]</sup> 我国数

学工作者从探讨点的可分性出发，对非标准分析发表了见解，<sup>[3~4]</sup>引起了热烈的讨论。本节论述非标准分析的哲学意义和物理意义。

### 1. 连续与间断

在标准分析里研究了有理数和无理数的集合，称为实数集合  $\mathbf{R}$ 。实数与直线上的点一一对应。实数的集合是连续的。

在非标准分析里，除了实数之外，引进了新的无限小量和无限大量，统称为超实数。超实数集合用  ${}^*\mathbf{R}$  表示。从“宏观”上看， ${}^*\mathbf{R}$  的数轴与  $\mathbf{R}$  的数轴一样；但从“微观”上看并不相同。在超实数轴上的每一点内，有许多非标准实数。这些非标准实数彼此相差无限小，形成一个有内部结构的点，称为“单子”。每个“单子”只有一个标准实数。从标准实数来看，点与点是连续的；然而从点有内部结构来看，点与点又是间断的。超实数轴  ${}^*\mathbf{R}$  正是连续与间断的对立统一。

从物理意义上，超实数轴更接近描述客观世界。例如，一条光线，从“宏观”看无疑是连续的。狭义相对论的实验证明了光速不变，表明光轴不仅连续而且均匀。但是，光的电磁理论表明，光波是电磁波，而电磁波是由变化的电场与变化的磁场交替变化而产生的。所以，从“微观”看光轴不仅不连续，而且不均匀。量子理论揭示出光具有波动和粒子二象性，正表明了光是连续和间断的对立统一。由此可见，非标准分析的超实数轴  ${}^*\mathbf{R}$  比标准实数轴  $\mathbf{R}$  具有更大的现实性，物理意义更深刻，更有利于揭示出连续与间断的辩证法。

### 2. 点内的三角形

马克思在《数学手稿》中有一段精彩的论述，他写道：“辅助三角形的两个边是由  $dx$  和  $dy$  构成的，因此它们比点 (*punkte*) 还小，所以在这种情况下要敢于把弦等同于弧，或者反过来把弧等同于弦。”<sup>[5]</sup> 马克思的这一见解已为非标准分析所证实。例如，求函数  $f(x)$  在  $D$  点的导数，按照标准分析（见图 1.1）。

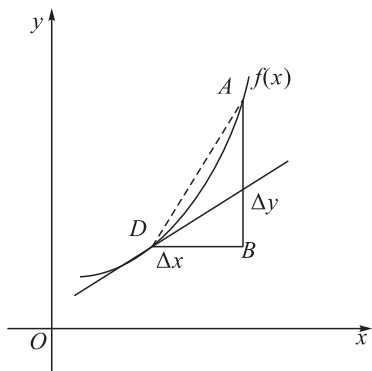


图 1.1 三角形在点外

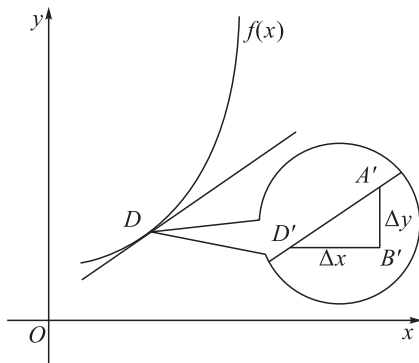


图 1.2 三角形在点内

$$f'(x_D) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

求  $D$  点的导数，要求动点  $A$  无限趋近于  $D$  点，但又不能达到  $D$  点，即  $\Delta x$  趋近于零，但又不能等于零。微分三角形  $\triangle ABD$ ，只能是近似的。在点以外，要把弦与弧等同起来，在直觉上是想不通的。

在非标准分析中，允许动点  $A$  进入  $D$  点内（见图 1.2），圆圈内为  $D$  点“放大”的情况。微分三角形  $\triangle A'B'D'$  比  $D$  点还要小， $\triangle A'B'C'$  是点内的三角形。因而在点内把弦与弧等同起来，在直觉上就是可以想象的。按照非标准分析

$$f'(x_D) = \text{st}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$$

其中  $\text{st}(\Delta x) = 0$ ,  $\Delta x \neq 0$ 。符号  $\text{st}$  表示取标准部分。

下面举一个物理学的例子：试求做自由落体运动的物体在任一点  $D$  的速度。根据标准分析

$$\begin{aligned} v_D &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}g(t_D + \Delta t)^2 - \frac{1}{2}gt_D^2}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( gt_D + \frac{1}{2}g \Delta t \right) = gt_D \end{aligned}$$

既然  $\Delta t$  趋近于零，而又不等于零，把  $\frac{1}{2}g \Delta t$  丢掉，总是丢掉了一

些，因而  $v_D = gt_D$ ，在直觉上就只能认为是近似的。根据非标准分析

$$v_D = \text{st}\left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right) = \text{st}\left[gh_D + \frac{1}{2}g \Delta t\right] = gt_D$$

因为  $\Delta t$  已进入  $t_D$  这一点之内， $\Delta t$  是比任何实数都更小的无限小，把  $\frac{1}{2}g \Delta t$  丢掉是合理的，因而  $v_D = gt_D$  可以认为是精确的。

### 3. 线内的三角形

从点内的三角形，自然可以扩展到线内的三角形。

现举一例说明：证明在椭圆中，过顶点  $A$  的曲率半径  $\rho_A$  等于半通径  $p$ （见图 1.3）。

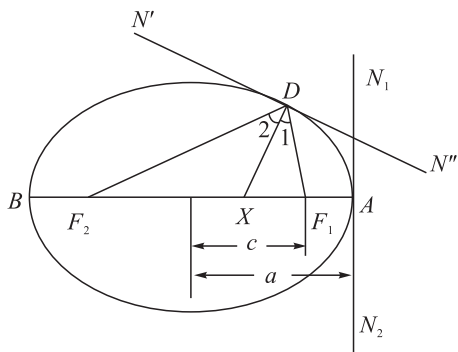


图 1.3 三角形在线外

应用极限方法证明如下：  
过  $A$  点的法线与接近  $A$  点的任一点  $D$  的法线相交于  $X$ 。当动点  $D$  趋近于  $A$  点时， $X$  的极限位置为  $X^*$ ，即  $\rho_A = AX^*$ 。 $N_1N_2$ ， $N'N''$  分别为过  $A$  点和  $D$  点的切线。根据椭圆切线的性质和  $\angle 1 = \angle 2$ ，在  $\triangle F_1DF_2$  中，根据三角形内角平分线的定理知

$$\frac{F_1X}{DF_1} = \frac{F_2X}{DF_2}$$

当  $D \rightarrow A$ ， $X \rightarrow X^*$ ，则有

$$\frac{F_1X^*}{AF_1} = \frac{F_2X^*}{AF_2}$$

即

$$\frac{\rho_A - (a - c)}{a - c} = \frac{(a + c) - \rho_A}{a + c}$$

则得

$$\rho_A = \frac{a^2 - c^2}{a} = \frac{b^2}{a} = p$$

上述证明应用了标准分析中的极限方法。<sup>[6]</sup>

应用非标准分析，则  $D$  点要进入  $A$  点内，成为  $A$  点内的一个“子点”  $D'$ ，且  $\triangle F_1 D' F_2$  比线段  $AB$  还窄，是线内的三角形。同样证得  $\rho_A = p$ 。在标准分析中是认为  $D$  点无限接近  $A$  点，而又不能达到  $A$  点，因而  $\rho_A = AX^*$  就只能是近似的。实际上是必须达到  $A$  点，这个差值必须“扬弃”，转化为零。在非标准分析中，即要进入  $A$  点，使  $\triangle F_1 D' F_2$  比线还窄。非标准分析更易于理解，在直觉上更精确。

#### 4. 质分与量分

“一尺之棰，日取其半，万世不竭。”这说明物体可分，无疑是对的。但是量分必然导致质分。没有量分就没有质分。同样，没有质分也就没有量分。在非标准分析之前的数学，纯粹考虑量的分割：有限的线段可以无限地分割下去，一半的一半仍然可以再分为一半。在物理学上却不然，量分必然导致质分。元素可以分到原子、分子为止，再分就发生质变，变成其他元素了。电子的电荷如果再分必然导致质变。能量子如果能再分也会发生质变。由于非标准分析的建立，为在数学中探讨质的分割打开了大门。在非标准分析中，分到“点”里则发生质变。在“点”里是一个非阿基米德域。充分多个无限小也大不出“点”外去。只承认量分，不承认质分，这是不符合客观实际的。量分达到一定的“关节点”必然发生质变，不可能纯粹量分到无限。数学应当反映这一物理现实。非标准分析揭示了“分”的辩证法，揭示了量分与质分的辩证关系。<sup>[7]</sup>

#### 5. 相对论与非阿基米德域

阿基米德域的性质是，一个非常小的正数，只要累加充分多次，其和可以任意大。量的分割必然要引起质的分割，同样，量的累加也必然要引起质的累加。相对论的速度合成定律，是对阿基米德域性质的否定。相对论的速度合成定律为

$$\omega = \frac{u + v}{1 + \frac{uv}{c^2}}$$

光相对于惯性系 $\Sigma$ 的速度为 $c$ ，且 $\Sigma$ 相对于惯性系 $\Sigma'$ 又在以速度 $v$ 运动，则光相对于 $\Sigma'$ 的速度由上式可知为

$$w = \frac{c + v}{1 + \frac{cv}{c^2}} = c$$

相对论认为不可能超过光速。这说明高速世界是一个非阿基米德世界。阿基米德性质对标准分析为真，对非标准分析为假。高速世界既然是一个非阿基米德世界，这意味着在相对论中应用非标准分析更恰当些。<sup>[8]</sup>

## 6. 抽象的点与点的抽象

在许多实际问题中，当线度是如此之长，以至于考虑点本身的线度对于解决问题没有什么意义时，一个没有线度（没有大小、厚度、宽度）的点便抽象出来。在物理学上抽象为质点。在数学中成为一个抽象的“点”。这无疑是科学的抽象。

现代科学的发展使我们认识到，任何称之为“点”的事物都是有结构的、可分的。例如，在太阳系中，地球是一个“点”，它有结构，可分；分子可作为一个“点”，它有结构，可分；“基本”粒子可作为“点”，同样有结构，可分……我们又进行新的抽象：点是有结构的、可分的，这是对点的抽象，同样是科学的抽象。在一些条件下，可以认为点不可分，无结构；在另一些条件下，则可认为点可分，有结构。这正是点的辩证法。

非标准分析为我们打开了一个新世界——点的世界。任何一个“点”，都是一个“世界”；任何一个“世界”，都是一个“点”。地球是一个“世界”，但在太阳系或银河系中只是一个“点”。分子是个“点”，但对于光子来说却又是一个“世界”。正如天外又有天一样，点内又有点。从数学上说，由更小的层次看来，在任何一个“点”中，都可以建立坐标系，因为它是一个“世界”。由更大的层次看来，任何一个“世界”，都可以仅仅是坐标系中的一“点”。

恩格斯在《自然辩证法》中，第一句话就写道：“在自然科学中，由于它本身的发展，形而上学的观点已经成为不可能的

了”。<sup>[9]</sup>非标准分析揭示了“分”的辩证法和“点”的辩证法。它的哲学意义应当给予肯定。非标准分析对于克服现代物理学中的“奇点”和“发散”的困难，无疑是有巨大意义的。鲁滨孙早已指出：“人们可以期望现代物理的某些分支，特别是令人头痛的发散问题，可能从非标准分析中得到益处。”

## 1.2 切线坐标变换

曲线上任一点的切线不仅具有几何意义，而且具有物理意义。因为物体沿曲线运动时任一点的速度的方向即在该点的切线方向。在直角坐标系中，用  $x, y$  这两个变量描述曲线；在极坐标系中，用  $r, \theta$  这两个变量描述曲线；在切线坐标系中，则用  $r, \alpha$  这两个变量描述曲线。 $\alpha$  为矢径  $r$  与切线之间的夹角，如图 1.4 所示。

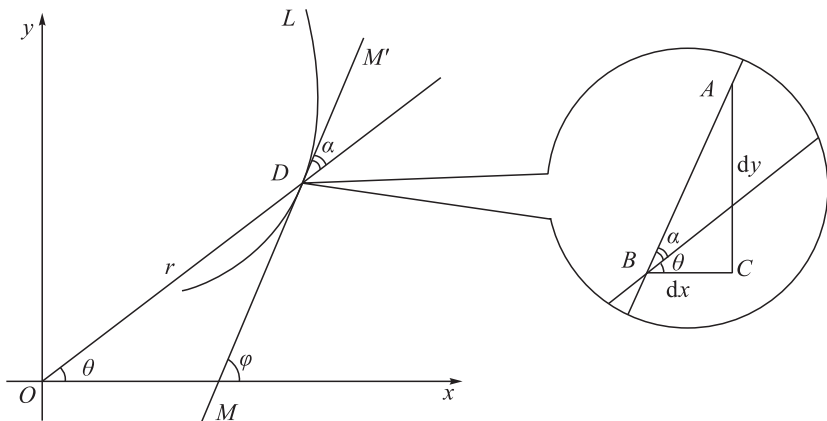


图 1.4 直角坐标、极坐标与切线坐标

将直角坐标变换为极坐标，其变换式为：

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad (1.1)$$

在大多数高等数学书中都证明过下述公式<sup>[10~11]</sup>：

$$\tan \alpha = \frac{r}{r_{\theta}} \quad (1.2)$$

其中  $r'_\theta = \frac{dr}{d\theta}$ 。应用 (1.2) 式可将极坐标为换为切线坐标。称

(1.2) 式为切线坐标变换式。

下面用非标准分析方法证明切线变换式 (1.2)。

### 1. 从直角坐标出发证明

假设曲线  $L$  在  $D$  点不垂直于  $x$  轴, 即  $dx \neq 0$ , 应用变换式 (1.1),

则有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{r\cos\theta + (dr/d\theta)\sin\theta}{-r\sin\theta + (dr/d\theta)\cos\theta}$$

把  $D$  点用显微镜放大, 如图 1.4 所示, 由  $dx$ ,  $dy$  构成的微分三角形比  $D$  点还小, 已进入  $D$  点之内,  $\triangle ABC$  是点内三角形。这时, 曲线  $L$  与其在  $D$  点处的切线已吻合, 曲线可作为直线处理。在点内  $\triangle ABC$  中, 可知:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin(\alpha + \theta)}{\cos(\alpha + \theta)} = \frac{\sin\alpha \cdot \cos\theta + \cos\alpha \cdot \sin\theta}{\cos\alpha \cdot \cos\theta - \sin\alpha \cdot \sin\theta}$$

$$\text{则有 } \frac{r\cos\theta + (dr/d\theta)\sin\theta}{-r\sin\theta + (dr/d\theta)\cos\theta} = \frac{\sin\alpha \cos\theta + \cos\alpha \sin\theta}{\cos\alpha \cos\theta - \sin\alpha \sin\theta}$$

化简即得:

$$\tan\alpha = \frac{r}{(dr/d\theta)}$$

### 2. 从极坐标出发证明

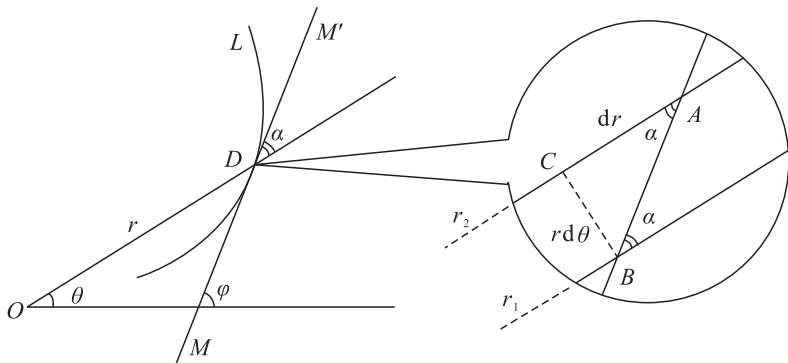


图 1.5 图右圆圈为  $D$  点放大的图示



如图 1.5 所示, 由  $dr$ ,  $r d\theta$  组成的微分三角形比  $D$  点还小, 已进入  $D$  点内,  $\triangle ABC$  是点内三角形。这时, 曲线可用直线来代替, 圆弧  $r d\theta$  也可用直线代替。不难推广由  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r d\theta$  组成的三角形比直线  $r$  还小, 已进入直线  $r$  之内,  $\triangle OBC$  是线内三角形。

在直角  $\triangle ABC$  中, 可知:

$$\tan \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{r d\theta}{dr}$$

则得

$$\tan \alpha = \frac{r}{(dr/d\theta)}$$

可以看出, 应用非标准分析的方法证明切线变换式 (1.2), 比应用标准分析方法更为简单直观。

### 3. 曲率半径公式

如图 1.6 所示,  $D$  为曲线  $L$  上任一点,  $MM'$  为过  $D$  点的切线。曲线上的  $D_1$  点为  $D$  点邻近的一点。  $NN'$  为过  $D_1$  点的切线。切线  $MM'$  和切线  $NN'$  相交的夹角为  $\Delta\varphi$ ,  $\widehat{DD_1} = \Delta s$ ,  $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi$

根据曲率半径  $\rho$  的定义知:

$$\rho = \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta\varphi} = \frac{ds}{d\varphi} \quad (1.3)$$

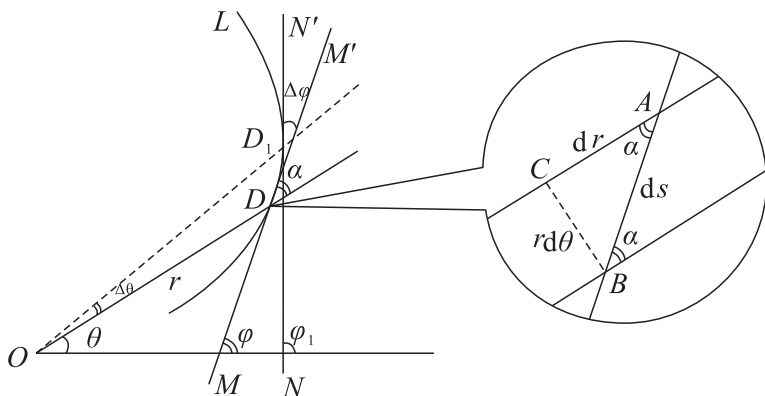


图 1.6

标准分析认为  $D_1$  点可以无限接近  $D$  点又不能到达  $D$  点; 非标准分析则认为  $D_1$  可以进入  $D$  点内, 形成点内的三角形。在

$\triangle ABC$  中, 曲线段  $ds$  可由直线段代替, 从图 1.6 可知:

$$ds = \frac{r d\theta}{\sin\alpha} \quad (1.4)$$

$\triangle OCB$  是一线内三角形。在点外、线外, 增量用  $\Delta r$ ,  $\Delta\theta$ ,  $\Delta s$  等表示; 在点内、线内, 则可用  $dr$ 、 $d\theta$ 、 $ds$  表示。由点外、线外到点内、线内的过程, 可以理解为取极限的过程。

在图 1.4、图 1.5 中, 都只是把点内三角形的两条直角边加以比较。在图 1.6 中关系到斜边。

将 (1.4) 式代入 (1.3) 式得:

$$\rho = \frac{r}{\sin\alpha} \cdot \frac{d\theta}{d\varphi} \quad (1.5)$$

由图 1.6 可知

$$\varphi = \alpha + \theta$$

则知

$$\Delta\varphi = \Delta\alpha + \Delta\theta$$

当  $D_1$  点进入  $D$  点后, 即有

$$d\varphi = d\alpha + d\theta \quad (1.6)$$

将 (1.6) 式代入 (1.5) 式得:

$$\rho = \frac{r}{\sin\alpha} \cdot \frac{d\theta}{d\alpha + d\theta}$$

即得到计算曲率半径的一个新公式:

$$\rho = \frac{r}{\sin\alpha} \cdot \frac{1}{1 + \frac{d\alpha}{d\theta}} \quad (1.7)$$

### 1.3 圆锥曲线理论

本节应用切线坐标变换, 可以建立一种圆锥曲线的新理论。得出的圆锥曲线的切线坐标方程, 在天体力学中有一些优点, 能推导出天体运行统一的能量方程。应用切线坐标变换还能推导出圆锥曲线统一的曲率半径公式。

### 1. 圆锥曲线的切线坐标方程

根据圆锥曲线的极坐标方程, 应用切线坐标变换  $\tan\alpha = \frac{r}{r_\theta}$ , 很容易导出圆锥曲线的切线坐标方程。圆锥曲线的极坐标方程为

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta} \quad (1.8)$$

$$r'_\theta = \frac{dr}{d\theta} = \frac{pe\sin\theta}{(1 + e\cos\theta)^2} = \frac{r^2 e\sin\theta}{p} \quad (1.9)$$

将 (1.9) 式代入 (1.2) 式得:

$$\tan\alpha = \frac{p}{re\sin\theta} \quad (1.10)$$

由三角公式  $\csc^2\alpha = 1 + \cot^2\alpha$

即有 
$$\frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \frac{1}{\tan^2\alpha} \quad (1.11)$$

将 (1.10) 式代入 (1.11) 式得

$$\frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \frac{r^2 e^2 \sin^2\theta}{p^2}$$

将 (1.8) 式  $p = r(1 + e\cos\theta)$  代入上式得:

$$\frac{1}{\sin^2\alpha} = \frac{2(1 + e\cos\theta) + e^2 - 1}{(1 + e\cos\theta)^2}$$

再将 (1.8) 式  $(1 + e\cos\theta) = \frac{p}{r}$  代入上式得

$$\frac{p}{2r^2\sin^2\alpha} - \frac{1}{r} = \frac{e^2 - 1}{2p} \quad (1.12)$$

对 (1.12) 式可讨论如下:

(1) 对于椭圆  $e < 1$ ,  $e = \frac{c}{a}$ ,  $p = \frac{b^2}{a}$ ,  $a^2 - c^2 = b^2$ ,

则得 
$$\frac{e^2 - 1}{2p} = -\frac{1}{2a} \quad (1.13)$$

则椭圆的切线坐标方程为:

$$\frac{p}{2r^2\sin^2\alpha} - \frac{1}{r} = -\frac{1}{2a} \quad (1.14)$$

(2) 对于抛物线  $e = 1$ ,

得 
$$\frac{e^2 - 1}{2p} = 0 \quad (1.15)$$

则抛物线的切线坐标方程为：

$$\frac{p}{2r^2 \sin^2 \alpha} - \frac{1}{r} = 0 \quad (1.16)$$

(3) 对于双曲线  $e > 1$ ,  $e = \frac{c}{a}$ ,  $p = \frac{b^2}{a}$ ,  $c^2 - a^2 = b^2$ ,

得 
$$\frac{e^2 - 1}{2p} = \frac{1}{2a} \quad (1.17)$$

则双曲线的切线坐标方程为：

$$\frac{p}{2r^2 \sin^2 \alpha} - \frac{1}{r} = \frac{1}{2a} \quad (1.18)$$

上述证明大大简化了 D. L. Livesey 应用几何方法证明的与 (1.14)、(1.16)、(1.18) 等价的三个方程。<sup>[12]</sup> 且 Livesey 并未得出统一的圆锥曲线的切线坐标方程。方程 (1.12) 在天体力学中有一定意义。应用方程 (1.12) 能推导出天体在有心力作用下运动的统一的能量方程：<sup>[13]</sup>

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = \frac{GMm(e^2 - 1)}{2p}$$

并能很简明地求出天体运行的离心率公式等。

## 2. 圆锥曲线统一的曲率半径公式。

采用切线坐标可以十分简洁地得出圆锥曲线统一的曲率半径的新公式为：

$$\rho = \frac{p}{\sin^3 \alpha} \quad (1.19)$$

(1) 在极坐标下证明。

在极坐标下，曲率半径公式为

$$\rho = \frac{(r^2 + r_{\theta}'^2)^{3/2}}{r^2 + 2r_{\theta}'^2 - rr_{\theta}''} \quad (1.20)$$

将  $\tan \alpha = \frac{r}{r_{\theta}'}$  代入 (1.11) 式得

$$r^2 + r_{\theta}'^2 = \frac{r^2}{\sin^2 \alpha} \quad (1.21)$$

由 (1.9) 知

$$r_{\theta}' = \frac{r^2 e \sin \theta}{p} \quad (1.22)$$

将 (1.8) 式代入上式, 再微分上式得

$$r_{\theta}'' = \left[ \frac{pe \sin \theta}{(1 + e \cos \theta)^2} \right]'$$

经微分运算后得:

$$r_{\theta}'' = \frac{r^3}{p^3} (pe \cos \theta + 2pe^2 - pe^2 \cos^2 \theta) \quad (1.23)$$

将 (1.22)、(1.23) 代入 (1.20) 式分母得

$$r^2 + 2r_{\theta}'^2 - rr_{\theta}'' = \frac{r^3}{p}$$

将 (1.21)、(1.24) 代入 (1.20) 式得

$$\rho = \frac{p}{\sin^3 \alpha} \quad (1.19)$$

采用极坐标下的曲率半径公式 (1.20), 在计算中较为繁杂。而应用本文推导出的切线坐标下的曲率半径公式, 运算过程大为简化。下面是另一证明。

(2) 在切线坐标下证明。

应用切线坐标变换, 由 (1.10) 式知

$$\tan \alpha = \frac{p}{re \sin \theta}$$

即 
$$\cot \alpha = \frac{re \sin \theta}{p} = \frac{e \sin \theta}{(1 + e \cos \theta)} \quad (1.25)$$

微分上式得:

$$-\frac{1}{\sin^2 \alpha} \cdot \frac{d\alpha}{d\theta} = \frac{r}{p} + \frac{r^2(e^2 - 1)}{p^2} \quad (1.26)$$

由圆锥曲线的切线坐标方程 (1.12) 知:

$$e^2 - 1 = \frac{2p^2}{2r^2 \sin^2 \alpha} - \frac{2p}{r} \quad (1.27)$$

将 (1.27) 代入 (1.26) 得:

$$\frac{d\alpha}{d\theta} = \frac{r \sin^2 \alpha}{p} - 1 \quad (1.28)$$

将 (1.28) 代入 (1.7) 式

$$\rho = \frac{r}{\sin \alpha} \cdot \frac{1}{1 + \frac{d\alpha}{d\theta}}$$

则得

$$\rho = \frac{p}{\sin^3 \alpha} \quad (1.19)$$

通过具体运算, 即可知新公式 (1.7) 在某些方面优越于公式 (1.20)。

### 3. 三种坐标的联系

|     |   |                       |                     |
|-----|---|-----------------------|---------------------|
|     | 直角坐标                                    | 离心率                   | 半通径                 |
| 椭圆  | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ | $e = \frac{c}{a} < 1$ | $p = \frac{b^2}{a}$ |
| 抛物线 | $y^2 = -2px$                            | $e = 1$               | $p$                 |
| 双曲线 | $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ | $e = \frac{c}{a} > 1$ | $p = \frac{b^2}{a}$ |

↓ ↑  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$

|          |                                   |
|----------|-----------------------------------|
|          | 极坐标                               |
| 圆锥曲线统一方程 | $r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$ |

↓ ↑  $\tan \alpha = \frac{r}{dr/d\theta}$

|          |   |                                  |
|----------|---|----------------------------------|
|          | 切线坐标  | 曲率半径                             |
| 圆锥曲线统一方程 | $\frac{p}{2r^2 \sin^2 \alpha} - \frac{1}{r} = \frac{e^2 - 1}{2p}$ | $\rho = \frac{p}{\sin^3 \alpha}$ |

↓ ↑  $p = \frac{b^2}{a}, e = \frac{c}{a}$

|    |  |
|----|--|
|    | 切线坐标   |
| 椭圆 | $\frac{p}{2r^2 \sin^2 \alpha} - \frac{1}{r} = -\frac{1}{2a}$ |

续表

|     | 切线坐标  |
|-----|---|
| 抛物线 | $\frac{p}{2r^2 \sin^2 \alpha} - \frac{1}{r} = 0$            |
| 双曲线 | $\frac{p}{2r^2 \sin^2 \alpha} - \frac{1}{r} = \frac{1}{2a}$ |

图 1.7 三种坐标的联系

## 1.4 切线坐标的应用

应用切线坐标研究圆锥曲线带来明显好处。物体在曲线上一点的运动方向即切线方向，因而采用切线坐标，把几何关系与物理关系联系起来，把时间空间与物质运动联系起来。用切线坐标研究其他曲线也会得出一些有意义的新结果。

### 1. 阿基米德螺线

阿基米德螺线的极坐标方程为

$$r = a\theta \quad (1.29)$$

则

$$r'_\theta = a \quad (1.30)$$

$$\tan \alpha = \frac{r}{r'_\theta} = \theta \quad (1.31)$$

则知阿基米德螺线的切线坐标方程为：

$$r = a \tan \alpha \quad (1.32)$$

由 (1.31) 得知

$$\frac{d\alpha}{d\theta} = \cos^2 \alpha \quad (1.33)$$

代入公式 (2.7) 可得阿基米德螺线的曲率半径公式为：

$$\rho = \frac{r}{2\sin \alpha - \sin^3 \alpha} \quad (1.34)$$

### 2. 对数螺线

对数螺线的极坐标方程为：

$$r = ae^{b\theta} \quad (1.35)$$

其中  $a, b$  为常量, 则有

$$r'_\theta = abe^{b\theta} \quad (1.36)$$

则

$$\tan\alpha = \frac{r}{r'_\theta} = \frac{1}{b} \quad (1.37)$$

$$\frac{d\alpha}{d\theta} = 0 \quad (1.38)$$

代入公式 (1.7) 得知对数螺线的曲率半径公式为:

$$\rho = \frac{r}{\sin\alpha} \quad (1.39)$$

应用(1.37)、(1.39)于星际航行的对数螺线轨道的一些推导。<sup>[14~15]</sup>  
将作出一些改进。

### 3. 双纽线

双纽线的极坐标方程为

$$r^2 = 2a^2 \cos 2\theta \quad (1.40)$$

其中  $a$  为常量, 微分上式有:

$$2rr'_\theta = -4a^2 \sin 2\theta \quad (1.41)$$

则

$$\tan\alpha = \frac{r}{r'_\theta} = -\cot 2\theta = \tan\left(\frac{\pi}{2} + 2\theta\right) \quad (1.42)$$

故

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\theta \quad (1.43)$$

将 (1.43) 代入 (1.40) 得出双纽线的切线坐标方程

$$r^2 = 2a^2 \sin\alpha \quad (1.44)$$

微分 (1.43) 式得

$$\frac{d\alpha}{d\theta} = 2 \quad (1.45)$$

将 (1.45) 代入公式 (1.7) 得双纽线的曲率半径公式为:

$$\rho = \frac{r}{3\sin\alpha} \quad (1.46)$$

应用切线坐标的公式计算某些曲线的曲率半径, 比之于用直角坐标或极坐标的公式要简明得多, 且新的公式都具有一定的物理意义。



## 1.5 天体运行的公式

### 1. 开普勒第二定律

开普勒第二定律表明：行星绕太阳做椭圆轨道运行时，矢径扫过的面积速度  $B$  不变，即。

$$B = \frac{dA}{dt} = \text{常量} \quad (1.47)$$

其中  $dA$  为矢径  $r$  在  $dt$  时间内扫过的面积。应用点内三角形、线内三角形及切线坐标，很容易得出面积速度公式为

$$B = \frac{1}{2}rv\sin\alpha \quad (1.48)$$

其中  $v$  为行星运行的线速度。

(1) 应用非标准分析证明。

证明如下：

行星运动的线速度  $v$  可表示为

$$v = \frac{ds}{dt} \quad (1.49)$$

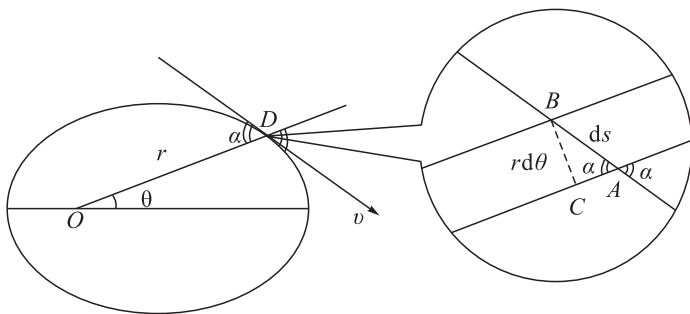


图 1.8

如图 1.8 所示，行星运动在  $D$  点，其速度为  $v$ 。 $\triangle ABC$  为  $D$  点内的三角形， $\triangle OBC$  为线内三角形。矢径  $r$  在  $dt$  时间扫过的面积  $dA$  为：

$$dA = \frac{1}{2} r \cdot r d\theta \quad (1.50)$$

在点内 $\triangle ABC$ 中

$$r d\theta = ds \cdot \sin\alpha \quad (1.51)$$

将(1.49)、(1.50)、(1.51)代入(1.47)式, 则得

$$B = \frac{1}{2} r v \sin\alpha \quad (1.48)$$

采用切线坐标所表示的面积速度公式(1.48), 在天体力学中是有用的。

(2) 另一种证明。

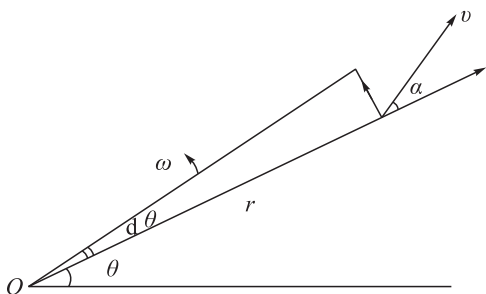


图 1.9

如图 1.9 所示: 角速度

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (1.52)$$

$$\text{线速度 } v = \frac{r}{\sin\alpha} \cdot \frac{d\theta}{dt} \quad (1.53)$$

$$\text{面积速度 } B = \frac{1}{2} r^2 \cdot \frac{d\theta}{dt} \quad (1.54)$$

如果将(1.53)代入(1.54)即得

$$B = \frac{1}{2} r v \sin\alpha \quad (1.48)$$

## 2. 半通径 $p$ 的公式

应用圆锥曲线的曲率半径公式和面积速度公式, 可以证明天体力学中一个很重要的公式

$$\frac{4B^2}{p} = GM \quad (1.55)$$

证明: 根据天文观测, 质量为  $m$  的天体, 在质量为  $M$  的中心天体的引力的作用下, 按圆锥曲线轨道运动。在曲线上任一点  $D$  的法向力为  $F_n$ , 如图 1.10 所示, 根据牛顿第二定律

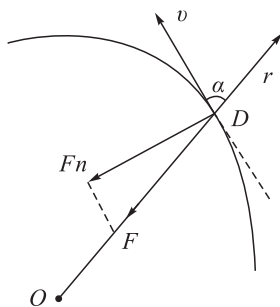


图 1.10

$$F_n = \frac{mv^2}{\rho} \quad (1.56)$$

但  $F_n = F \sin\alpha$  (1.57)

由 (1.48) 知

$$v^2 = \frac{4B^2}{r^2 \sin^2\alpha} \quad (1.58)$$

将 (1.57)、(1.58) 代入 (1.56)，由圆锥曲线的曲率半径  $\rho = \frac{p}{\sin^3\alpha}$ ，

则得  $F = m \frac{4B^2}{pr^2}$ , (1.59)

另一方面我们知道，这里的有心力为万有引力，得

$$m \frac{4B^2}{pr^2} = G \frac{Mm}{r^2}$$

则  $\frac{4B^2}{p} = GM$  (1.55)

### 3. 天体运行的能量方程

由圆锥曲线的切线坐标方程 (1.12) 可知：

$$\frac{1}{r^2 \sin^2\alpha} = \frac{1}{p} \left( \frac{2}{r} + \frac{e^2 - 1}{p} \right) \quad (1.60)$$

将 (1.48) 代入上式得

$$v^2 = \frac{4B^2}{p} \left( \frac{2}{r} + \frac{e^2 - 1}{p} \right) \quad (1.61)$$

将 (1.55) 代入 (1.61) 得

$$v^2 = GM \left( \frac{2}{r} + \frac{e^2 - 1}{p} \right) \quad (1.62)$$

上式便是天体沿圆锥曲线运行时的统一的能量方程。根据圆锥曲线的几何性质，不难分别得出椭圆、抛物线和双曲线的能量方程。

对椭圆轨道

$$v^2 = GM \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad (1.63)$$

对抛物线轨道

$$v^2 = \frac{2GF}{r} \quad (1.64)$$

对双曲线轨道

$$v^2 = GM\left(\frac{2}{r} + \frac{1}{a}\right) \quad (1.65)$$

(1.63)、(1.64)、(1.65) 在天体力学中常被称为能量积分或活力积分。<sup>[16]</sup>

天体在引力场运动, 根据能量守恒和转化定律可知:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = C (C \text{ 为常数}) \quad (1.66)$$

而 (1.62) 式也可表示为

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = \frac{GMm(e^2 - 1)}{2p} \quad (1.67)$$

这恰为能量守恒和转化定律的具体表述。左边第一项为动能、第二项为势能, 右边为常量。由 (1.67) 可知  $C = \frac{GMm(e^2 - 1)}{2p}$ 。

对椭圆轨道

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{2a} \quad (1.68)$$

对抛物线轨道

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = 0 \quad (1.69)$$

对双曲线轨道

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = \frac{GMm}{2a} \quad (1.70)$$

(1.14)、(1.16)、(1.18) 分别表示椭圆、抛物线、双曲线的切线坐标方程, 它们分别与能量方程 (1.68)、(1.69)、(1.70) 相比较, 可以看出形式上极为相似。这说明采用切线坐标所反映的圆锥曲线的几何特性与物理规律密切联系起来了。

应用能量方程 (1.68), 不难求出第一宇宙速度的公式, 对于圆轨道  $a = r$ , 则

$$v_{\perp} = \sqrt{\frac{GM}{r}} \quad (1.71)$$

应用能量方程 (1.69), 不难求出第二宇宙速度的公式为

$$v_{\parallel} = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \quad (1.72)$$

应用能量方程 (1.67) 可得到离心率公式为

$$e = \sqrt{1 - \frac{p}{GM} \left( \frac{2GM}{r} - v^2 \right)} \quad (1.73)$$

将 (1.48) 代入 (1.55) 得

$$p = \frac{r^2 v^2 \sin^2 \alpha}{GM} \quad (1.74)$$

将 (1.74) 代入 (1.73) 即得到发射人造天体的离心率公式

$$e = \sqrt{1 - \frac{r^2 v^2 \sin^2 \alpha}{G^2 M^2} \left( \frac{2GM}{r} - v^2 \right)} \quad (1.75)$$

如果将 (1.14) 式与 (1.68) 式相比较, 将 (1.16) 式与 (1.69) 式相比较, 将 (1.18) 式与 (1.70) 式相比较也能得到离心率公式。离心率公式 (1.75) 通常是用解二阶微分方程而得到的。<sup>[18]</sup>

#### 4. 离心率公式的讨论

在距地心  $r$  的地方, 以速度  $v$ 、角度  $\alpha$  发射人造天体, 则由 (1.75) 式便可确定人造天体运行轨道的离心率  $e$ 。为了便于讨论将 (1.71) 代入 (1.75) 得

$$e = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \left( \frac{v}{v_{\perp}} \right)^2 \left[ 2 - \left( \frac{v}{v_{\perp}} \right)^2 \right]} \quad (1.76)$$

将 (1.72) 代入 (1.75) 得

$$e = \sqrt{1 - 4 \sin^2 \alpha \left( \frac{v}{v_{\parallel}} \right)^2 \left[ 1 - \left( \frac{v}{v_{\parallel}} \right)^2 \right]} \quad (1.77)$$

根据 (1.75)、(1.76)、(1.77) 可讨论如下, 参看图 1.11。

(1) 当  $\alpha = 90^\circ$ ,  $v = v_{\perp}$  时,  $e = 0$ , 这时人造天体运行的轨道是圆。

(2) 当  $\alpha = 90^\circ$ ,  $v_{\perp} < v < v_{\parallel}$  时,  $e < 1$ 。这时人造天体运行的轨道

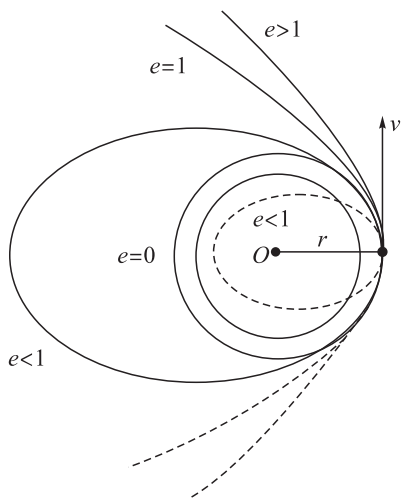


图 1.11

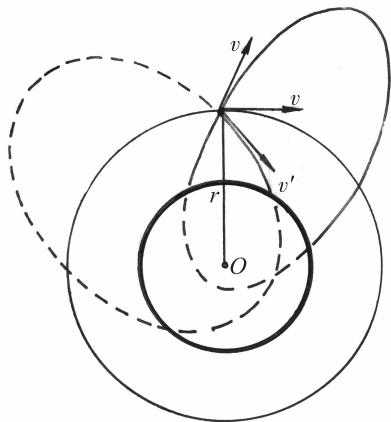


图 1.12

是椭圆，这种情况下发射点是近地点。

(3) 当  $\alpha = 90^\circ$ ,  $v = v_{II}$  时,  $e = 1$ , 这时人造天体运行的轨道是抛物线。

(4) 当  $\alpha = 90^\circ$ ,  $v > v_{II}$  时,  $e > 1$ , 这时人造天体运行的轨道是双曲线。

(5) 当  $\alpha = 90^\circ$ ,  $v < v_I$  时,  $e < 1$ , 这时发射体的轨道仍然是椭圆, 不过发射点是轨道的远地点, 轨道将有一部分进入地球之内, 表明它不能成为一个人造地球卫星。在地面上抛体运动的轨道是椭圆的一部分, 而不是抛物线。只有当把重力近似地看作不变时, 才得到轨道为抛物线。洲际弹道火箭射得高、射得远, 这就不能认为重力不变了, 也就不能把轨道作为抛物线来计算。

(6) 当  $r$  一定、 $v$  一定, 且  $v_I < v < v_{II}$ , 却以不同发射角  $\alpha$  ( $\alpha \neq 0^\circ$ ) 发射一批人造地球卫星, 根据 (1.75) 知, 这批人造地球卫星的轨道都是椭圆 (见图 1.12)。由椭圆轨道的能量方程 (1.68) 式

可知, 这些椭圆轨道的长半径  $a$  都是相等的, 但离心率  $e$  是不同的。当  $\alpha = 90^\circ$  时,  $e$  最小。从多级火箭的末级发射出人造地球卫星时, 一般都使  $\alpha = 90^\circ$ ,  $\alpha$  过小或过大, 都会造成轨道不能绕地球运行, 而变成一个洲际弹道火箭。若要发射一个人造天体进入预定轨道, 对确定轨道离心率的  $r$ ,  $v$ ,  $\alpha$  将有十分严格的要求。

否则，真是差之毫厘，失之千里。为了发射成功必须进行制导——即控制加导航。

### 5. 洲际弹道火箭

下面应用能量方程和离心率公式来讨论发射洲际弹道火箭时，发射速度  $v$ 、发射角度  $\alpha$  与弹道的关系。

在地面上，以速度  $v$  ( $v < v_1$ )、角度  $\alpha$  ( $\alpha \neq 0^\circ$ ) 发射一枚洲际火箭。 $R$  为地球半径。假定地球是球对称的，且忽略地球自转的影响和空气的阻力。根据离心率公式 (1.75)，即可求出洲际弹道火箭轨道的离心率。这时  $e < 1$ ，轨道为一椭圆。根据椭圆轨道的能量方程 (1.63) 或 (1.68) 即可求出轨道的长半径  $a$ ，求出了  $e$  和  $a$ ，即可求出弹道高  $H$  和射程  $L$ 。

由图 1.13 可知：

$$H = FB - R$$

$$\text{即 } H = a(1+e) - R \quad (1.78)$$

由图 1.13 知：

$$L = \widehat{K_1 K_2} = R \cdot 2\beta \quad (1.79)$$

由极坐标方程 (1.8) 可知：

$$\cos\theta = \frac{1}{e} \left( \frac{p}{R} - 1 \right)$$

$$\text{而 } \sin\beta = \sin(180^\circ - \theta) = \sqrt{1 - \cos^2\theta}$$

$$\text{则 } \sin\beta = \frac{1}{e} \sqrt{e^2 - \left( \frac{p}{R} - 1 \right)^2}$$

将 (1.74) 和 (1.75) 代入上式的根号内化简得：

$$\sin\beta = \frac{1}{e} \cdot \frac{v^2 R}{2GM} \sin 2\alpha \quad (1.80)$$

将上式代入 (1.79) 即得到射程的公式：

$$L = 2R \arcsin \left( \frac{1}{e} \cdot \frac{v^2 R}{2GM} \sin 2\alpha \right) \quad (1.81)$$

将 (1.72) 代入即可表示为

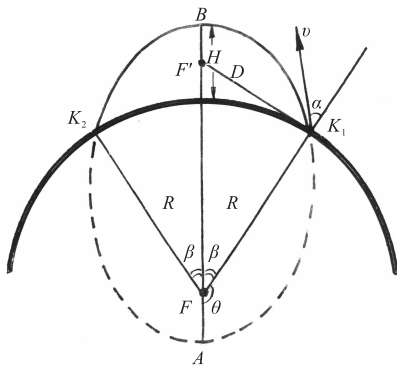


图 1.13

$$L = 2R \cdot \arcsin \left[ \frac{1}{e} \left( \frac{v}{v_{\parallel}} \right)^2 \sin 2\alpha \right] \quad (1.82)$$

## 6. 最小能量轨道

上面的推导表明：已知洲际弹道火箭的发射速度  $v$  和角度  $\alpha$ ，即可求出弹道的离心率  $e$ 、长半径  $a$ ，弹道高  $H$  和射程  $L$ 。下面要解决的问题是，以什么速度  $v_0$  和什么角度  $\alpha_0$  发射一枚洲际火箭，使之能从  $K_1$  点击中  $K_2$  点，且使所用的能量最小。

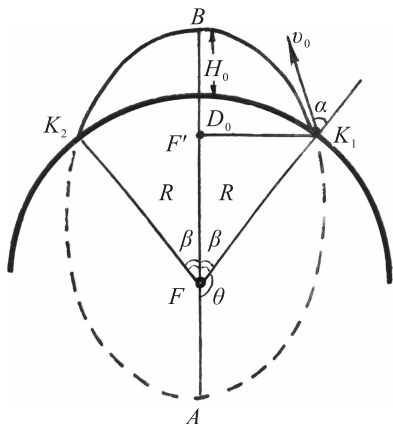


图 1.14

根据椭圆轨道的能量方程 (1.68) 可知：最小能量的轨道是通过  $K_1, K_2$  两点的诸椭圆轨道中，长半径  $a$  最小的轨道。由图 1.13 可知  $a = \frac{R+D}{2}$ ，欲使  $a$  最小，即应使  $D$  最小，显然  $D$  的最小值  $D_0$  应是从  $K_1$  垂直于长半径，如图 1.14 所示。

如果  $K_1, K_2$  两点已定，则角度  $\beta$  即可求得。根据几何关系不难

求得：

$$D_0 = R \sin \beta \quad (1.83)$$

$$a_0 = \frac{R(1 + \sin \beta)}{2} \quad (1.84)$$

$$c_0 = \frac{R \cos \beta}{2} \quad (1.85)$$

$$e_0 = \frac{c_0}{a_0} = \frac{\cos \beta}{1 + \sin \beta} \quad (1.86)$$

$$H_0 = a_0 + c_0 - R = \frac{R}{2} (\sin \beta + \cos \beta - 1) \quad (1.87)$$

$$2\alpha_0 = 90^\circ + \beta$$

$$\therefore \alpha = 45^\circ + \frac{\beta}{2} \quad (1.88)$$



将 (1.84) 代入能量方程 (1.63) 即得:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{R} \left( \frac{\sin\beta}{1 + \sin\beta} \right)} \quad (1.89)$$

即

$$v_0 = v_{\parallel} \sqrt{\frac{\sin\beta}{1 + \sin\beta}} \quad (1.90)$$

## 1.6 四类匀变直线运动

伽利略提出了“加速度”的概念，对力学的发展作出了重要贡献。他着重研究了物体在斜面上的匀变速直线运动，以及自由落体运动——一种特殊的匀变速直线运动。伽利略研究了单位时间内速度的变化相等的这种运动；但当他欲研究单位距离内速度的变化相等的这种运动时，就不可避免地遇到数学困难——因为这需要应用微积分。

牛顿正因为创立和掌握了微积分方法，才可能研究当一物体受到一种与速度成正比的抵抗力 ( $F \propto v$ ) 时，物体的运动规律，以及当一物体受到一种与速度的平方成正比的抵抗力 ( $F \propto v^2$ ) 时，物体的运动规律。<sup>[19]</sup>

根据相对论的启发，把匀变速直线运动中的时间变量与空间变量交换，很奇妙地得到这是一种受到与速度的立方成正比的抵抗力 ( $F \propto v^3$ ) 时的运动。这引导作者从与牛顿的《自然哲学之数学原理》不相同的角度，得出了以下四种匀变直线运动的规律。

### 1. 第一类：匀加速直线运动

这是牛顿力学的教科书中，不可缺少的内容。

定义：

$$\text{速率} \quad v = \frac{ds}{dt} \quad (1.91)$$

$$\text{加速度} \quad a = \frac{dv}{dt} \quad (1.92)$$

当

$$a = \text{常量}$$

我们根据牛顿第二定律得知, 物体所受的力  $F$  即为常量 ( $F = \text{常量}$ )

由 (1.92) 得

$$\int dv = a \int dt$$

则

$$v = at + C_1$$

当  $t=0$  时,  $v=v_0$ , 故  $C_1=v_0$ , 则

$$v = v_0 + at \quad (1.93)$$

由 (1.91)、(1.93) 得

$$\int ds = \int (v_0 + at) dt$$

则

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 + C_2$$

当  $t=0$  时,  $s=0$ , 故  $C_2=0$ , 则

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \quad (1.94)$$

由 (1.93)、(1.94) 消去时间  $t$ , 则得:

$$v^2 - v_0^2 = 2as \quad (1.95)$$

## 2. 第二类: 匀变速步直线运动

定义:

$$\text{速率} \quad v = \frac{ds}{dt} \quad (1.96)$$

$$\text{变速步} \quad A' = \frac{dv}{ds} \quad (1.97)$$

这里把单位路程内速度的变化, 定义为变速步。变速步为物体运动速度对路程的微分。

当  $A' = \text{常量}$

由 (1.96) 得

$$\int dv = A' \int ds$$

$$v = A' s + c$$

当

$s=0$  时,  $v=v_0 \therefore C_1=v_0$ , 则

$$v = v_0 + A' s \quad (1.98)$$

加速度  $a$  与变速步  $A'$  的关系为

$$A' = \frac{dv}{ds} = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{dv}{v dt} \quad (1.99)$$

即 
$$A' = \frac{a}{v} \longleftrightarrow a = A'v \quad (1.100)$$

根据牛顿第二定律得知  $F \propto v$ 。

由 (1.99) 得

$$\int \frac{dv}{v} = \int A' dt$$

则 
$$\ln v = A't + C_2$$

当  $t=0$  时,  $v=v_0$ , 故  $C_2 = \ln v_0$ , 则

$$v = v_0 e^{A't} \quad (1.101)$$

由 (1.96) 得

$$\frac{ds}{dt} = v_0 e^{A't}$$

$$\int ds = \int v_0 e^{A't} dt$$

则 
$$s = \frac{v_0}{A'} e^{A't} + C_3$$

当  $t=0$  时,  $s=0$ , 故  $C_3 = -\frac{v_0}{A'}$ , 则

$$s = \frac{v_0}{A'} (e^{A't} - 1) \quad (1.102)$$

将  $A' = \frac{a}{v}$  代入得:

$$v = v_0 e^{\frac{at}{v}} \quad (1.103)$$

$$s = \frac{v_0 v}{a} (e^{\frac{at}{v}} - 1) \quad (1.104)$$

### 3. 第三类: 匀变对数直线运动

定义:

$$\text{速率 } v = \frac{ds}{dt} \quad (1.105)$$

$$\text{变对数 } A'' = \frac{dk}{ds} \quad (1.106)$$

其中  $k = \ln v$ , 速度的自然对数对于路程的微分, 称为变对数。当

$$A'' = \text{常量}$$

由 (1.106) 得

$$\int dk = A'' \int ds$$

$$\text{则 } k = A''s + C_1$$

当  $s=0$  时,  $k=k_0$ , 故  $C_1=k_0$ , 则

$$k = k_0 + A''s \quad (1.107)$$

加速度  $a$  与变对数  $A''$  的关系为

$$A'' = \frac{dk}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{d \ln v}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{dv}{v dt} \cdot \frac{1}{v} = \frac{a}{v^2} \quad (1.108)$$

$$\text{即 } A'' = \frac{a}{v^2} \longleftrightarrow a = A''v^2 \quad (1.109)$$

根据牛顿第二定律得知  $F \propto v^2$ 。

由 (1.108) 得

$$\int \frac{dv}{v^2} = \int A'' dt$$

$$\text{则 } -v^{-1} = A''t + C_2$$

当  $t=0$  时,  $v=v_0$ , 故  $C_2 = -v_0^{-1}$ , 则

$$-\frac{1}{v} + \frac{1}{v_0} = A''t \quad (1.110)$$

$$v = \frac{v_0}{1 - A''v_0 t} \quad (1.111)$$

由 (1.105) 得

$$\int ds = \int \frac{v_0}{1 - A''v_0 t} dt$$

$$s = \frac{1}{A''} \ln(1 - A''v_0 t) + C_3$$

当  $t=0$  时,  $s=0$ , 故  $C_3=0$ , 则

$$s = \frac{1}{A''} \ln(1 - A''v_0 t) \quad (1.112)$$

将  $A'' = \frac{a}{v^2}$  代入得

$$v = \frac{v_0}{1 - \frac{v_0}{v^2}at} \quad (1.113)$$

$$s = \frac{v^2}{a} \ln\left(1 - \frac{v_0}{v^2}at\right) \quad (1.114)$$

#### 4. 第四类：匀加时步直线运动

定义：

$$\text{时率} \quad \omega = \frac{dt}{ds} \quad (1.115)$$

$$\text{加时步} \quad A = \frac{d\omega}{ds} \quad (1.116)$$

这里把单位路程内时率的变化，定义为加时步。加时步为物体运动的时率对路程的微分。第四类运动与第一类运动相比较，很明显，恰好是时间变量与空间变量相互交换。在相对论中，时间空间是相互联系的，而且时空是对称的。既然第一类运动是有确定的物理意义，那么第四类运动也应当有确定的物理意义。

当

$$A = \text{常量}$$

由 (1.116) 得

$$\int d\omega = A \int ds$$

则

$$\omega = As + C_1$$

当  $s=0$  时， $\omega = \omega_0$ ，则  $C_1 = \omega_0$ ，故

$$\omega = \omega_0 + As \quad (1.117)$$

由 (1.115)

$$\int dt = \int (\omega_0 + As) ds$$

则

$$t = \omega_0 s + \frac{1}{2}As^2 + C_2$$

当  $s=0$  时， $t=0$ ，故  $C_2=0$ ，则

$$t = \omega_0 s + \frac{1}{2}As^2 \quad (1.118)$$

由 (1.117)、(1.118) 消除路程, 则得

$$\tau w^2 - \tau w_0^2 = 2At \quad (1.119)$$

加速度  $a$  与加时步  $A$  的关系为

$$A = \frac{d\tau w}{ds} = \frac{d\tau w}{dt} \cdot \frac{dt}{ds}, \text{ 而 } \tau w = \frac{1}{v} \quad (1.120)$$

则

$$A = -\frac{d\left(\frac{1}{v}\right)}{dt} \frac{dt}{ds} = -\frac{dv}{v^2 dt} \cdot \frac{1}{v}$$

即

$$A = -\frac{a}{v^3} \longleftrightarrow a = -Av^3 \quad (1.121)$$

根据牛顿第二定律得知  $F \propto v^3$ 。

由 (1.119) 知

$$A = \frac{\tau w^2 - \tau w_0^2}{2t}$$

由 (1.120) 得

$$A = \frac{\left(\frac{1}{v}\right)^2 - \left(\frac{1}{v_0}\right)^2}{2t}$$

则

$$A = \frac{v_0^2 - v^2}{2v^2 v_0^2 t} \quad (1.122)$$

由 (1.121) 得

$$v = \frac{2v_0^2 at}{v^2 - v_0^2} \quad (1.123)$$

由 (1.117) 得

$$s = \frac{w - w_0}{A}$$

即

$$s = \frac{\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0}}{\frac{v_0^2 - v^2}{2v^2 v_0^2 t}}$$

则

$$s = \frac{2vv_0 t}{v + v_0} \quad (1.124)$$

表 1.1 四类匀变直线运动

|     | 变量   | 关系  | 力的性质            | 运动规律  |
|-----|--|---|-----------------|---|
| 第一类 | $v = \frac{ds}{dt}$<br>$a = \frac{dv}{dt}$   | $a = \text{常量}$                                     | $F = \text{常量}$ | $v = v_0 + at$<br>$s = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$<br>$v^2 - v_0^2 = 2as$   |
| 第二类 | $v = \frac{ds}{dt}$<br>$A' = \frac{dv}{ds}$  | $A' = \text{常量}$<br>$a = A'v$                       | $F \propto v$   | $v = v_0 e^{\frac{at}{v_0}}$<br>$s = \frac{v_0^2}{a} (e^{\frac{at}{v_0}} - 1)$                                  |
| 第三类 | $v = \frac{ds}{dt}$<br>$A'' = \frac{dk}{ds}$ | $k = \ln v$<br>$a = A''v^2$<br>$A'' = \text{常量}$    | $F \propto v^2$ | $v = \frac{v_0}{1 - \frac{v_0^2}{v^2} at}$<br>$s = \frac{v_0^2}{a} \ln \left( 1 - \frac{v_0^2}{v^2} at \right)$ |
| 第四类 | $w = \frac{dt}{ds}$<br>$A = \frac{dw}{ds}$   | $w = \frac{1}{v}$<br>$a = -Av^3$<br>$A = \text{常量}$ | $F \propto v^3$ | $v = \frac{2v_0^2 at}{v^2 - v_0^2}$<br>$s = \frac{2v_0 t}{v + v_0}$   |

牛顿在《自然哲学之数学原理》一书中，研究了物体运动时所受的阻力与速度成正比 ( $f \propto v$ ) 以及与速度的方成正比 ( $f \propto v^2$ )。牛顿之所以作这种简化，是因为这种性质的力代入牛顿运动方程后是可以积分的。牛顿还研究了阻力的一部分与速度成正比，一部分与速度的平方成正比。进而研究了流体力学中“湍流”有关的问题。“湍流”问题很复杂，“湍流”是高速流体力学的主题，至今还未解决，这是一个不可积分的系统。

牛顿并未研究过阻力与速度的立方成正比 ( $f \propto v^3$ ) 的情况。本节的推导表明，只要把牛顿力学中速度和加速度定义中的时间变量与空间变量交换，即可很简单地得到这类运动的规律。这种运动应当找到现实模型。从技术上讲，现在已能实现高速、超高速的运动。然而，可积系统总是局限性很大的。

